解析数论入门的入门

邹广翼

2023 年 4 月 3 日

[1]

1 Mertens' theorems

本文旨在证明 Mertens' theorems：

$$\sum_{p\le x}\frac{\log p}{p}=\log x+O(1).$$

证明 1 (From wikipedia) *The main step in the proof of Mertens' second theorem is*

$$O(n)+n\log n=\log n!=\sum_{p^k\le n}\lfloor n/p^k\rfloor\log p=\sum_{p^k\le n}\left(\frac{n}{p^k}+O(1)\right)\log p=n\sum_{p^k\le n}\frac{\log p}{p^k}+O(n)$$

where the last equality needs $\sum_{p^k\le n}\log p=O(n)$ *which follows from* $\sum_{p\in(n,2n]}\log p\le\log\begin{pmatrix}2n\\ n\end{pmatrix}=O(n)$. *Thus, we have proved that*

$$\sum_{p^k\le n}\frac{\log p}{p^k}=\log n+O(1)$$

Since the sum over prime powers with $k\ge 2$ *converges, this implies*

$$\sum_{p\le n}\frac{\log p}{p}=\log n+O(1)$$

A partial summation yields

$$\sum_{p\le n}\frac{1}{p}=\log\log n+M+O(1/\log n)$$

里面用到的 partial summation 可以参看后面" 一些求和公式" 的内容，也可以通过一种 Riemann 积分的推广—-Riemann-Stieltjes 积分来证明。大概来说它就是把 $\int_a^b f(x)dx$ 中的 dx 换成 $dg(x)$，即 $\int_a^b f(x)dg(x)$，Riemann 和 $\sum_i f(t_{i-1})(x_i-x_{i-1})$ 换成 Riemann-Stieltjes 和 $\sum_i f(t_i)(g(x_i)-g(x_{i-1}))$ 其满足一些 Riemann 积分有的性质如线性、可分部积分等。这种定义让它在计算离散的求和时也十分方便。

事实上我们有：

$$\log[x]!=\sum_{p\le x}\sum_{p^\alpha\le x}[\frac{x}{p^\alpha}]\log p$$

左边的 $\log[x]!=\sum_{n\le x}\log x$ 的估计式是数学分析中的简单题，我们这里用 Riemann-Stieltjes 给一个简单的证明:

定理 1.1 $\log[x]!=x\log x-x+O(\log x)$

[1]zouguangyi2001@mail.ustc.edu.cn

证明 2

$$\begin{aligned}\log[x]! &= \sum_{n\le x}\log n = \int_1^x \log t d[t] \\ &= [x]\log x - \int_1^x \frac{[t]}{t}dt = [x]\log x - \int_1^x \frac{t-\{t\}}{t} \\ &= [x]\log x - x + \int_1^x \frac{\{t\}}{t} \\ &= x\log x - x + O(\log x)\end{aligned}$$

■

另外，我们注意到右边指数 ≥ 2 的部分是可以丢掉用 $O(x)$ 代替的。这是由于 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log n}{n^2} < \infty$ 导致的。故我们有

$$\sum_{p\le x}[\frac{x}{p}]\log p = x\log x + O(x)$$

我们想从这个式子得出

$$\sum_{p\le x}\frac{\log p}{p} = \log x + O(1),$$

我们转换成证明如下命题：

定理 1.2 (Shapiro's Tauberian theorem/Shapiro 的陶伯型定理) 若 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$，$a_n \geq 0$ 满足

$$\sum_{n\le x}[\frac{x}{n}]a_n = x\log x + O(x)$$

则我们有

$$\sum_{n\le x}\frac{a_n}{n} = \log x + O(1)$$

我们证明了这个定理再用 Riemann-Stieltjes 积分就能证素数倒数和估计，证明很初等但富有技巧性，主要是对 $\sum_{n\le x} a_n$(我们记为 $S(x)$) 的估计，非常巧妙.

证明 3 我们记 $T(x) = \sum_{n\le x}[\frac{x}{n}]a_n$ 则我们有

$$S(x) - S(\frac{x}{2}) \leq T(x) - 2T(\frac{x}{2})$$

而由条件我们有

$$T(x) - 2T(\frac{x}{2}) = O(x)$$

所以我们对

$$S(\frac{x}{2^d}) - S(\frac{x}{2^{d+1}})$$

求和就有：

$$S(x) = O(x) + O(\frac{x}{2}) + O(\frac{x}{4}) + ... = O(2x)$$

这里 $O(x)$ 限制的常数不变。于是我们有：

$$\begin{aligned}\frac{1}{x}\sum_{n\le x}[\frac{x}{n}]a_n &= \frac{1}{x}\sum_{n\le x}(\frac{x}{n} + O(1))a_n \\ &= \sum_{n\le x}\frac{a_n}{n} + \frac{1}{x}O(\sum_{n\le x}a_n) = \log x + O(1)\end{aligned}$$

故

$$\sum_{n\le x}\frac{a_n}{n} = \log x + O(1)$$

■

定理 1.3

$$\sum_{p\le x}\frac{\log p}{p}=\log x+O(1)$$

定理 1.4

$$\sum_{n\le x}\frac{1}{p}=\log\log x+O(1)$$

在某些算法复杂度问题上会用到这个关系式 *(比如埃拉托斯特尼筛法 (sieve of Eratosthenes)* 求所有小于 n 素数时间复杂度为 $O(n\log\log n)$。并且这可以给出欧拉部分乘积 $\mathit{\Pi}_{p\le x}\frac{1}{1-\frac{1}{p}}$ 的一个估计。

证明 4 令

$$A(x)=\sum_{p\le x}\frac{\log p}{p}=\log x+O(1)$$

则

$$\begin{aligned}\sum_{n\le x}\frac{1}{p}&=\int_2^x\frac{1}{\log t}dA(t)\\&=\frac{A(x)}{\log x}+O(1)+\int_2^x A(t)d\frac{1}{\log t}\\&=\int_2^x A(t)\frac{1}{t\log^2 t}dt+O(1)\\&=\int_2^x\frac{\log t+O(1)}{t\log^2 t}dt+O(1)\\&=\log\log x+O(1).\end{aligned}\tag{1}$$

2 一些求和公式

定理 2.1 (Euler's summation formula) 如果 f 是一个连续可微函数，那么

$$\sum_{x<n\le y}f(n)=\int_y^x f(t)dt+\int_y^x(t-[t])f'(t)dt+f(x)([x]-x)-f(y)([y]-y)$$

进一步的我们还有:

定理 2.2 f 同上假设，设 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是一复数项数列，设

$$A(n)=\sum_{n\le x}a_n$$

那么我们就有:

$$\sum_{n\le x}a_nf(n)=A(x)f(x)-\int_1^x A(t)f'(t)dt$$

读者自行证明。

例 2.1 记 $\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$，则对 $s>1$ 有

$$\zeta(s)=\frac{s}{s-1}-s\int_1^{\infty}\frac{\{x\}}{x^{s+1}}$$

用这个可以在不引入 $\Gamma(s)$(伽马函数) 的情况下将 $\zeta(s)$ 解析延拓 (anlaytic continutation) 到右半复平面上，并可说明 $s=1$s 是 $\zeta(s)$ 留数为 1 的简单极点 (simple pole)，在用周线积分法证明一些渐进式时会用到这个结论。既然提到 $\theta(s)$ 读者可尝试证明

例 2.2 若 $s>1$ 则

$$\zeta(s)=\Pi_p^{\infty}\frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}$$

以及，

$$-\frac{\zeta'}{\zeta}(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Lambda(n)}{n^s}$$

其中 $\Lambda(n)$ 是曼戈尔特函数 *(von Mangoldt function)* 定义为:

$$\Lambda(n)=\begin{cases}\log p & n=p^{\alpha}\\ 0 & \text{其他情况}\end{cases}$$

定理 2.3 (Euler-Maclaurin summation formula) 设函数 f $k+$ 1 阶可导，且 $a,b\in\mathbb{Z}$ 则

$$\sum_{a\leq n\leq b}f(n)=\int_a^b f(t)+\sum_{r=0}^{k}\frac{(-1)^{r+1}}{(r+1)!}(f^{(r)}(b)-f^{(r)}(a))B_{r+1}+\frac{(-1)^k}{(k+1)!}\int_a^b B_{k+1}(t)f^{(k+1)}(t)dt$$

其中 B_t 和 $B_t(x)$ 指第 k 个伯努利数 *(Bernouli number)* 和伯努利多项式 *(Bernouli function)*

证明可参考 Murty.M.R. 所著《Problems in Analytic Number Theory》第二章。

2.1 证明对于 $x\in\mathbb{Z}^+$ 有

$$\sum_{n\leq x}\frac{1}{n}=\log x+\gamma+\frac{1}{2x}+\frac{1}{12x^2}+O(\frac{1}{x^3})$$

3 参考资料

[1].Tom M.Apostol ,Introduction to analytic Number Theory.

[2].Murty.M.R , Problems in Analytic Number Theory.

[3].Jacob Korevaar,Tauberian Theory-A Century of Developments.